Límite de una función

El límite de la función f(x) en el punto x_0, es el valor al que se acercan las imágenes (las y) cuando los originales (las x) se acercan al valor x_0. Es decir **el valor al que tienden las imágenes cuando los originales tienden a x_0**.

Vamos a estudiar el límite de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x_0 = 2$.

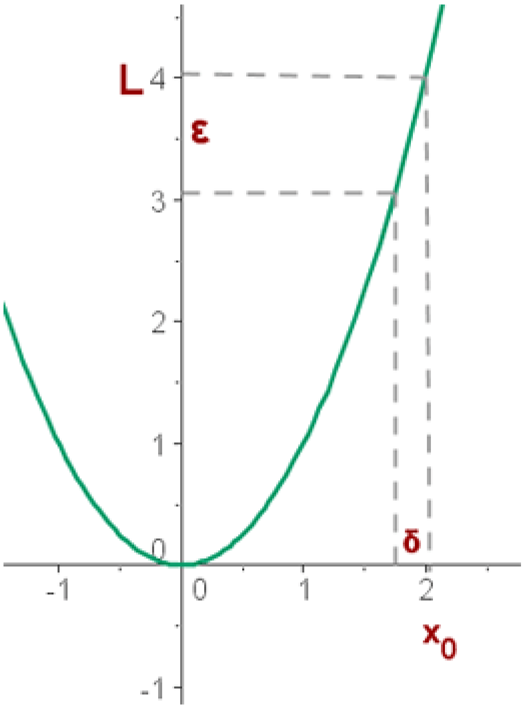
x	f(x)		x	f(x)
1,9	3,61		2,1	4.41
1,99	3,9601		2,01	4,0401
1,999	3,996001		2,001	4,004001
...	...		...	...
↓	↓		↓	↓
2	4		2	4

Tanto si nos acercamos a 2 por la izquierda o la derecha las imágenes se acercan a 4.

Definición de Límite de una función en un punto

Se dice que la función f(x) tiene como límite el número L , cuando x tiende a x_0, si fijado un número real positivo ε , mayor que cero, existe un numero positivo δ (dependiente de ε), tal que, para todos los valores de x distintos de x_0 que cumplen la condición $|x - x_0| < \delta$, se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 /\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



También podemos definir el concepto de límite a través de entornos:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ **sí y sólo sí, para cualquier entorno de L que tomemos, por pequeño que sea su radio ε, exite un entorno de x_0 , $E_\delta(x_0)$, cuyos elementos (sin contar x_0), tienen sus imágenes dentro del entorno de L , $E_\varepsilon(L)$.**

Límites laterales

Diremos que el límite de una función f(x) cuando x tiende hacia a por la izquierda es L, si y sólo si para todo ε > 0 existe δ > 0 tal que si x   (a+δ, a) , entonces |f (x) - L| <ε .

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, x \in (a+\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Diremos que el límite de una función f(x) cuando x tiende hacia a por la derecha es L , si y sólo si para todo ε > 0 existe δ > 0 tal que si x   (a, a + δ), , entonces |f (x) - L| <ε .

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

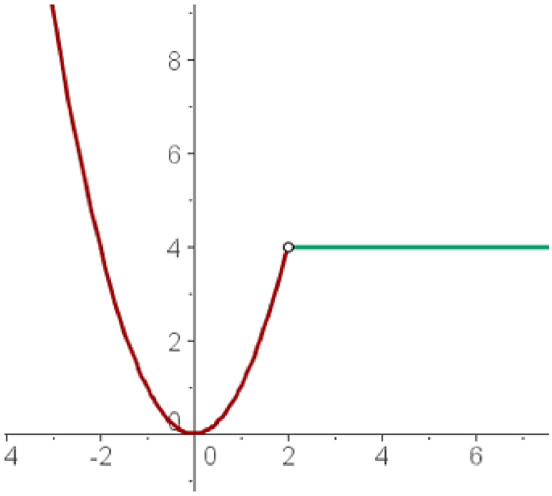
El límite de una función en un punto si existe, es único. Para que existe el límite de una función en un punto deben de existir los límites laterales en ese punto y ser iguales.

Ejemplo 1:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 2 \\ 4 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} 4 = 4$$



En este caso vemos que el **límite tanto por la izquierda como por la derecha cuando x tiende a 2 es 4**.

El límite de la función es 4 aunque la función no tenga imagen en x = 2.

Para calcular el límite de una función en un punto, no nos interesa lo que sucede en dicho punto sino a su alrededor.

Ejemplo 2

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} & x < 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \\ 1 & \text{si} & x > 0 \end{cases}$$

Hallar $\lim_{x \to 0} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^-} -1 = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Como no coinciden los **límites laterales**, la función no tiene límite en x = 0.

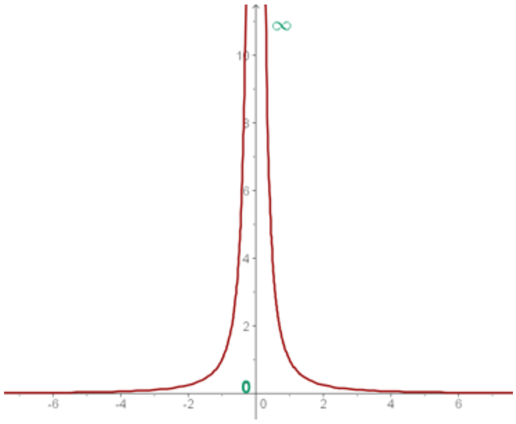
Limites infinitos

Una función **f(x)** tiene por límite $+\infty$ cuando **x** $\rightarrow$ **a**, si fijado un número real positivo **K>0** se verifica que **f(x)>k** para todos los valores próximos a **a**.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{R}^+\ \exists\delta=\delta(k)>0/\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)>k$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

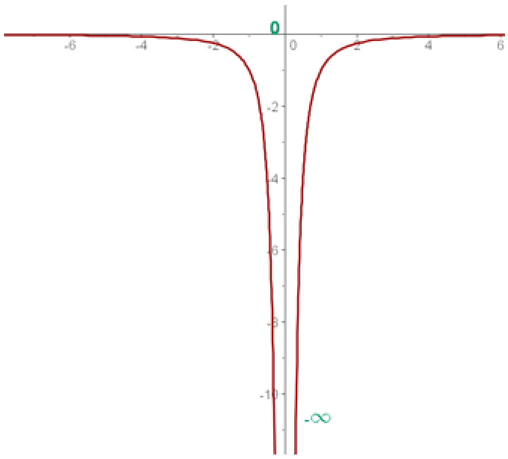


Una función **f(x)** tiene por límite $-\infty$ cuando **x** $\rightarrow$ **a**, si fijado un número real negativo **K < 0** se verifica que **f(x) < k** para todos los valores próximos a **a**.

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{R}^-\ \exists\delta=\delta(k)>0/\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)<k$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$



Límites en el infinito

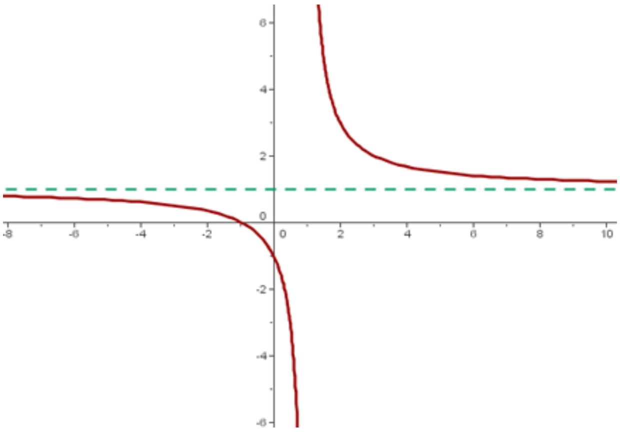
Límite cuando x tiende a infinito

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases} k \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists M=M(\varepsilon)\in\mathbb{R}^+ / x>M\Rightarrow |f(x)-k|<\varepsilon \\ +\infty \Leftrightarrow \forall P\in\mathbb{R}^+\ \exists M=M(P)\in\mathbb{R}^+ / x>M\Rightarrow f(x)>P \\ -\infty \Leftrightarrow \forall N\in\mathbb{R}^-\ \exists M=M(N)\in\mathbb{R}^+ / x>M\Rightarrow f(x)<N \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases} k \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists m=m(\varepsilon)\in\mathbb{R}^-\ /\ x<m \Rightarrow |f(x)-k|<\varepsilon \\ +\infty \Leftrightarrow \forall P\in\mathbb{R}^+\ \exists m=m(P)\in\mathbb{R}^-\ /\ x<M \Rightarrow f(x)>P \\ -\infty \Leftrightarrow \forall N\in\mathbb{R}^-\ \exists m=m(N)\in\mathbb{R}^-\ /\ x<M \Rightarrow f(x)<N \end{cases}$$

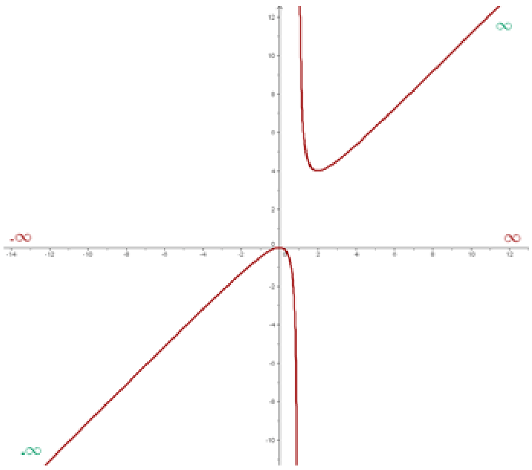
Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=1 \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$$



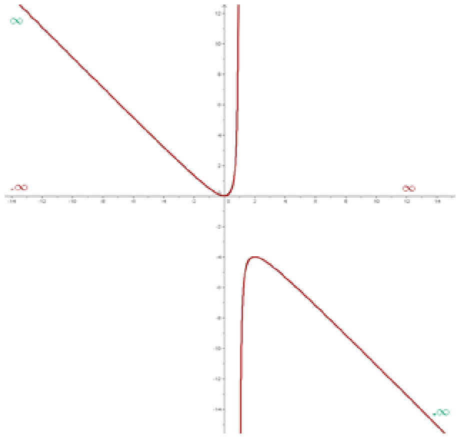
Ejemplo 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$$



Ejemplo 3:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-x^2}{x-1} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x-1} = \infty$$



Propiedades de los límites

Límite de una constante

$$\lim_{x \to a} k = k$$

Límite de una suma

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

Límite de un producto

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Límite de un cociente

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \qquad si \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Límite de una potencia

$$\lim_{x \to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x \to a}\left[f(x)\right]^{\lim_{x \to a} g(x)} \qquad si \quad f(x) > 0$$

Límite de un logarítmo

$$\lim_{x \to a}[\log_a f(x)] = \log_a\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \qquad \text{Si } a>0 \text{ y } f(x) > 0$$

Operaciones con infinito: Indeterminaciones

Infinito más un número

$$\infty \pm k = \infty$$

Infinito más infinito

$$\infty + \infty = \infty$$

Infinito menos infinito

$$\infty - \infty \rightarrow Ind$$

Productos con infinito

Infinito por un número

$$\infty \cdot (\pm k) = \pm\infty \qquad Si\ k \neq 0$$

Infinito por infinito

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

Infinito por cero

$$0 \cdot \infty \rightarrow Ind$$

Cocientes con infinito y cero

Cero partido por un número

$$\frac{0}{k} = 0$$

Un número partido por cero

$$\frac{k}{0} = \infty$$

Un número partido por infinito

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

Infinito partido por un número

$$\frac{\infty}{k} = \infty$$

Cero partido por infinito

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

Infinito partido por cero

$$\frac{\infty}{0} = \infty$$

Cero partido por cero

$$\frac{0}{0} \to Ind$$

Infinito partido por infinito

$$\frac{\infty}{\infty} \to Ind$$

Potencias con infinito y cero

Un número elevado a cero

$$k^0 = 1$$

Cero elevado a cero

$$0^0 \to Ind$$

Infinito elevado a cero

$$\infty^0 \to Ind$$

Cero elevado a un número

$$0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k>0 \\ \infty & \text{si } k<0 \end{cases}$$

Un número elevado a infinito

$$k^\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } K>0 \\ 0 & \text{si } k<0 \end{cases}$$

Cero elevado a infinito

$$0^\infty = 0$$

Infinito elevado a infinito

$$\infty^\infty = \infty$$

Uno elevado a infinito

$$1^\infty \to Ind$$

No distinguimos entre $+\infty$ y $-\infty$ para no alargar excesivamente la lista. Nos basta con saber:

La regla de los signos y que $a^{-n} = 1/a^{n}$

Cálculo de límites

Cálculo del límite en un punto

Si f(x) es una función polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas, etc, y está definida en el punto a, entonces se suele cumplir que:

$$\lim_{x \to a} = f(a)$$

Es decir: **para calcular el límite se sustituye en la función el valor al que tienden las x**.

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \to 1}(-x^2 - 5x + 6) = -1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 5x + 2} = \frac{3^2 - 2}{3^2 - 5 \cdot 3 + 2} = -\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x \to 1}\left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x}\right) = \left(\sqrt{1^2 + 3 \cdot 1} - \sqrt{1^2 + 1}\right) = 2 - \sqrt{2}$$

Ejemplo 2:

No tiene sentido calcular $\lim_{x \to -2} \sqrt{x}$

porque el dominio de definición está en el intervalo [0, ∞), por tanto no puede tomar valores que se acerquen a -2.

Ejemplo 3:

Sin embargo si podemos calcular $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

aunque 3 no pertenezca al dominio, D= ℝ−{2, 3}, si podemos tomar valores del dominio tan próximos a 3 como queramos.

Cálculo del límite en una función definida a trozos

En primer lugar tenemos que estudiar los **límites laterales** en los puntos de unión de los diferentes trozos.

Si coinciden, este es el valor del límite.

Si no coinciden, el límite no existe

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

En **x = -1**, los **límites laterales** son:

Por la izquierda: $\lim_{x \to -1^-} 1 = 1$

Por la derecha: $\lim_{x \to -1^+} x^2 = 1$

Como en ambos casos coinciden, existe el límite y vale **1**.

En **x = 1**, los **límites laterales** son:

Por la izquierda: $\lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$

Por la derecha: $\lim_{x \to 1^+} 2 = 2$

Como no coinciden los límites laterales **no tiene límite en x = 1**.

Cálculo de límites cuando x → ∞

Para calcular el límite de una función cuando x → ∞ se sustituyen las x por ∞.

Límite de funciones polinómicas en el infinito

El límite cuando x → ∞ de una función polinómica es +∞ o -∞ según que el término de mayor grado sea positivo o negativo.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to \infty} (3x^4 + x^3 - 2x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} (-x^2 + 5x + 6) = -\infty$$

Límite de la inversa de un polinomio en el infinito

Si P(x) es un polinomio, entonces: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{P(x)} = 0$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{3x^4 + x^3 - 2x} = 0$$

Cálculo de límites cuando x → −∞

Ejemplo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$ **1:**

$$\lim_{x \to -\infty} (3x^4 + x^3 - 2x) = \lim_{x \to \infty} (-3x^4 - x^3 + 2x) = -\infty$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to -\infty}(-x^2+5x+6)=\lim_{x\to \infty}(x^2-5x-6)=\infty$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{2x^2-8x-3}=\lim_{x\to \infty}\sqrt{2(-x)^2-8(-x)-3}=$$

Ejemplo 4:

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^3-5x}=\lim_{x\to \infty}\sqrt{(-x)^3-5(-x)}=\lim_{x\to \infty}\sqrt{-x^3+5x}$$

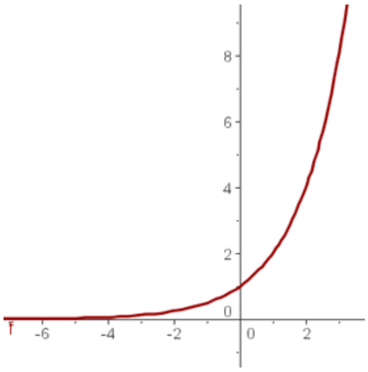
No existe el límite, porque el radicando toma valores negativos.

Límite de la función exponencial

Si a > 0

$$\lim_{x\to \infty} a^x=\infty$$

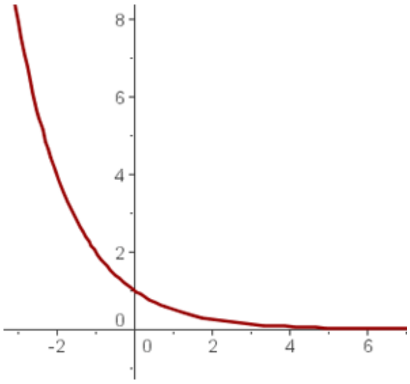
$$\lim_{x\to -\infty} a^x=0$$



Si 0 < a < 1

$$\lim_{x\to \infty} a^x=0$$

$$\lim_{x\to -\infty} a^x=\infty$$



Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to \infty} 3^{x+2}=\infty$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to-\infty} 3^{x+2} = \lim_{x\to\infty} 3^{-x+2} = \lim_{x\to\infty} 3^{-(x-2)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3^{x-2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ejemplo 3:

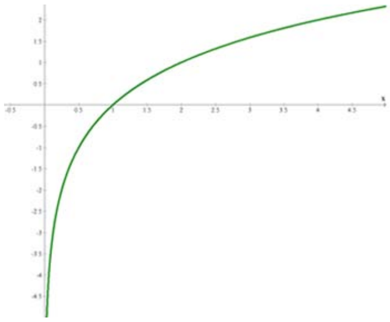
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{-(x-2)} = \lim_{x\to\infty} 3^{x-2} = \infty$$

Límite de la función logarítmica

Si a > 0

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$$

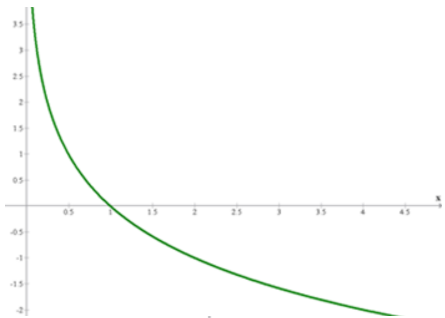
$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$$



Si 0 < a < 1

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \infty$$

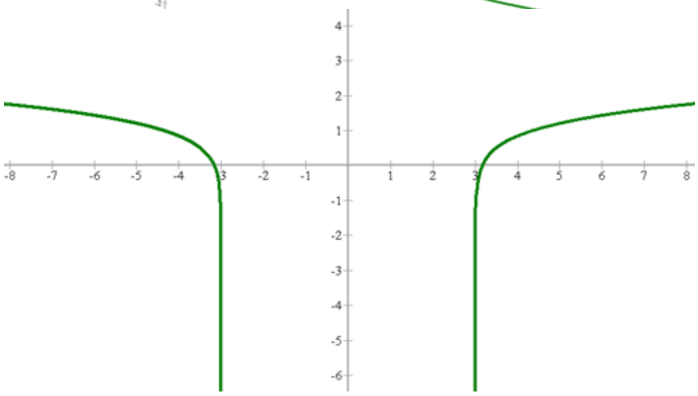
$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$$



Ejemplo:

$$f(x) = \log(x^2 - 9)$$

$$D = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$



$$\lim_{x\to-\infty} \log(x^2-9) = \lim_{x\to\infty} \log\left[(-x)^2 - 9\right] = \log\left[\lim_{x\to\infty}(x^2-9)\right] = \log\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to-3^-} \log(x^2-9) = \log\left[\lim_{x\to-3^-}(x^2-9)\right] = \log 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \log(x^2-9) = \log\left[\lim_{x\to 0}(x^2-9)\right] = \log(-9) \qquad \text{No existe}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \log(x^2-9) = \log\left[\lim_{x\to 3^+}(x^2-9)\right] = \log 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \log(x^2-9) = \log\left[\lim_{x\to \infty}(x^2-9)\right] = \log \infty = \infty$$

Resolución de Indeterminaciones

La obtención de una indeterminación no significa que el límite no exista o no se pueda determinar, en estos casos hay que efectuar operaciones particulares para resolver cada una de las indeterminaciones.

Tipos de indeterminación

1. Infinito partido por infinito

$$\frac{\infty}{\infty} \to Ind$$

2. Infinito menos infinito

$$\infty - \infty \to Ind$$

3. Cero partido por cero

$$\frac{0}{0} \to Ind$$

4. Cero por infinito

$$0 \cdot \infty \to Ind$$

5. Cero elevado a cero

$$0^0 \to Ind$$

6. Infinito elevado a cero

$$\infty^0 \to Ind$$

7. Uno elevado a infinito

$$1^\infty \to Ind$$

Comparación de infinitos

$$\text{Si } \lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \text{ y } \lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$$

1. f(x) es un infinito de orden superior a g(x) si:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = \infty$$

2. f(x) es un infinito de orden inferior a g(x) si:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = -\infty$$

2. f(x) es un infinito de igual orden a g(x) si:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

Dadas dos potencias de x, la de mayor exponente es un infinito de orden superior.

Dadas dos funciones exponenciales de base mayor que 1, la de mayor base es un infinito de orden superior.

Cualquier función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a cualquier potencia de x.

Las potencias de x son infinitos de orden superior a las funciones logarítmicas.

Dos polinomios del mismo grado o dos exponenciales de la misma base son infinitos del mismo orden.

Ejemplos:

Calculo de límites por comparación de infinitos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^{25}-25}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^7-7}}{x^3-3}\right) = \infty \qquad x^{\frac{7}{2}} > x^3$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\log\left(x^{34}-56\right)}{2x^2}\right] = 0$$

Límite de un número partido por cero $\frac{k}{0}$

El límite puede ser +∞, -∞ ó no tener límite.

Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0}$$

En este caso calculamos los límites laterales.

Si le damos a la x valores que se acerquen a -1 por la izquierda, tanto el numerador como denominador son negativos, por lo que el límite por la izquierda será: +∞.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{(-)}{(-)} = \infty$$

Si le damos a la x valores que se acerquen a -1 por la derecha, el numerador será positivo y el denominador negativo, por lo que el límite por la derecha será: - ∞.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{(+)}{(-)} = -\infty$$

Como no coinciden los límites laterales, la función no tiene límite cuando x $\to$ 1.

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{0}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{(0^-)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{(0^+)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

Indeterminación infinito partido infinito $\frac{\infty}{\infty}$

Podemos resolver esta indeterminación por dos métodos:

1. **Por comparación de infinitos.**

Ejemplos:

El numerador tiene mayor grado que el denominador.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5 - 3x^2}{x^4 - x^3} = \infty$$

El denominador tiene mayor grado que el numerador.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5 - 3x^2}{x^7 - x^3} = 0$$

El numerador y el denominador tienen el mismo grado. Entonces el límite es el cociente entre los coeficientes de mayor grado.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{3x^5-x^3}=\frac{2}{3}$$

El numerador es un infinito de orden superior.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^x}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{3^x}=0$$

El denominador es un infinito de orden superior.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^7-2}}{x^4-1}=0$$

Como $4>\frac{7}{2}$ el denominador tiene mayor orden.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^5-1)}{x^2-5}=0$$

El denominador tiene mayor orden.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^{23}}=\infty$$

El numerador tiene mayor orden.

2. Si se trata de **funciones potenciales dividimos todos los sumandos por la x elevada al mayor exponente.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{x^4-x^3}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^5}{x^5}-\frac{3x^2}{x^5}}{\frac{x^4}{x^5}-\frac{x^3}{x^5}}=\frac{2-\frac{3}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2-0}{0-0}=\infty$$

Si son **funciones exponenciales dividimos por la exponencial de mayor base.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+2}+2^x}{3^{x-2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x\cdot 3^2+2^x}{3^x\cdot 3^{-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3^x\cdot 3^2}{3^x}+\frac{2^x}{3^x}}{\frac{3^x\cdot 3^{-2}}{3^x}}=\frac{9+0}{\frac{1}{9}}=81$$

Indeterminación infinito menos infinito $\infty - \infty$

1. Por comparación de infinitos.

$$\lim_{x\to\infty}(x^7 - x^5 + x^3 - x^2) = \infty$$

Por tener x^7 mayor orden.

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - \sqrt{x+3} = \infty$$

Por tener x^2 mayor orden.

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - \sqrt{x^5+3} = -\infty$$

Porque $\frac{5}{2} > 2$

$$\lim_{x\to\infty}(3^x - \sqrt{x^8-2}) = \infty$$

3^x tiene mayor orden

2. Con funciones racionales.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4} - \frac{2x}{x-2}\right) = \infty - \infty$$

Efectuamos la resta y obtenemos $\frac{\infty}{\infty}$

Resolvemos esta indeterminación.

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1-2x(x+2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{-2x^2-4x+1}{x^2-4} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-2x^2-4x+1}{x^2-4} = -2$$

3. Cuando se trata de **funciones irracionales podemos multiplicar y dividir por el conjugado**.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x}) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[(\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x})\right]}{(\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2-x^2-x}{(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2-x}{(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x}-\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

Indeterminación cero partido cero $\frac{0}{0}$

1. Función racional sin radicales:

Se descomponen en factores los polinomios y se simplifica la fracción.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$$

No tiene límite en x = -1

2. Función racional con radicales:

En primer lugar **multiplicamos numerador y denominador por el conjugado** de la expresión irracional.

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador y simplificamos la fracción.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+\sqrt{1-x}) = 2$$

Indeterminación cero por infinito $0\cdot\infty$

Se transforma a $\frac{\infty}{\infty}$ ó a $\frac{0}{0}$

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Ejemplo:

$$\text{I} \quad \lim_{x\to\infty}(x+7)\cdot\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}}=\infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x+7)^2}{4x^2+3}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+14x+49}{4x^2+3}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

Indeterminación uno elevado a infinito 1^{∞}

Se resuelve transformando la expresión en una potencia del número e.

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

1er Método:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=1^{\infty}$$

Sumamos y restamos 1

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2x+1}{x+2}-1\right)^{\frac{1}{x-1}}=$$

Ponemos a común denominador los últimos sumando

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=$$

Sustituimos por el inverso del inverso

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}=$$

Elevamos al denominador y a su inverso

$$=\left[\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-1}}=$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+2}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

2º Método. Usando la siguiente transformación:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} h(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{2x+1}{x+2}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{2x+1-x-2}{x+2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x+2}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+2}\right)} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$